Вопрос: Саня написал на доске все числа от 11 до 23. После этого стер несколько чисел так, чтобы остальные числа, будучи перемноженными между собой, давали квадрат некоторого целого числа. Если считать, что Саня ленив и стирал как можно меньше чисел, посчитайте сумму этих стертых чисел.  
Решение:  
Рассмотрим множество M:

Очевидно, что чтобы произведение чисел давало квадрат некоего числа, степени простых делителей полученного произведения должны быть кратны 2. Отсюда следует, что на доске точно останется 16 = 24   
Также несложно сделать вывод, что все простые числа(кроме, быть может 11), точно будут стерты. Пусть N – множество стертых чисел. Постепенно будет пополнять его значениями. Пока лишь

Рассмотрим оставшиеся элементы M – оставшиеся на доске числа, и запишем их простые делители:  
11 – простое число  
12 = 22\*3  
14 = 2\*7  
15=3\*5  
16=24   
18 = 2 \* 32  
20 = 22\*5  
21 = 3\*7  
22 = 2\*11

Видно, что если мы оставим 11, то необходимо оставить и 22. Но тогда нужно как-то «добить» степень двойки до второй, чтобы произведение вышло квадратом некоторого числа. Есть 2 варианта:  
1) Оставляем на доске 14. Тогда необходимо также оставить и 21(чтобы у делителя 7 была вторая степень). Тогда мы снова имеем 2 варианта (чтобы у делителя 3 была четная степень):  
 а) Оставляем на доске 12. Имеем следующие числа на доске: 16, 11, 22, 14, 21, 12. Их произведение = 13 660 416. Это квадрат числа 3696. Следующие числа стерлись: 13, 15, 17, 18, 19, 20, 23(7 чисел). Их сумма = 125  
 б) Оставляем на доске 15. Тогда неминуемо необходимо оставить и 20. На доске остались: 16, 11, 22, 14, 21, 15, 20. Их произведение = 3 41 510 400. Это квадрат числа 18 480. Следующие числа стерлись: 12, 13, 17, 18, 19, 23 (6 чисел). Их сумма = 102

2) Оставляем на доске 18. Тогда уж точно на доске останутся: 16, 11, 22, 18. Оставим также на доске еще несколько чисел: оставим 12(т.к. необходимо лишь найти одну 3, чтобы произведение все еще являлось неким квадратом). Чтобы покрыть появившуюся 3 имеем 2 варианта:  
 а) Возьмем 15. Тогда неминуемо на доске остается и 20. Тогда на доске имеем: 16, 11, 22, 18, 12, 15, 20. Их произведение = 250 905 600. Это квадрат числа 15 840. Следующие числа стерлись: 13, 14, 17, 19, 21, 23(6 чисел). Их сумма: 107  
 б) Возьмем 21. Тогда непременно на доске останется и 14. Нужно каким-то образом довести до четной степени делитель 2. Но из оставшихся на доске чисел (15, 20) нет числа, который бы имел делитель 2 с нечетной степенью. Значит этот вариант не работает.

Если же мы не будем оставлять 11, то нет смысла оставлять и 22. То есть помимо тех простых чисел, которые уже стерты, не оставляя 11, мы также стираем минимум 2 числа. То есть уже минимум 6 стертых чисел. Так как в задаче не сказано находить минимальную сумму минимально-стертых чисел, то можно обойтись найденными результатами выше. Саня, так как ленив, сотрет 6 чисел. Возможные суммы стертых чисел: 102, 107.